

**DEVOIR SURVEILLE de MATHEMATIQUES****2e année de 1er cycle****Date : Vendredi 13 novembre 1998****Durée : 4 h (8 h - 12 h)****Seuls les polycopiés de cours de Mathématiques 2e année sont autorisés****LES CALCULATRICES SONT INTERDITES****Les deux parties sont complètement indépendantes l'une de l'autre****Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente****Chaque partie sera notée sur 10****Le texte comporte 4 pages**

---

**1e partie - GEOMETRIE**

*Dans tout ce qui suit, les espaces affines  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sont rapportés aux repères orthonormés  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  respectivement.*

**Exercice 1**

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  la courbe définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^{2t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Etudier les branches infinies de cette courbe.
2. Calculer une équation cartésienne satisfaite par tous les points de la courbe.
3. Calculer la tangente et le plan osculateur en  $t = 0$ .

### Exercice 2

Dans  $\mathbb{R}^2$  on considère le cercle  $C$  d'équation  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , la droite  $D : x = 1$  et un point quelconque  $P \in D$  de coordonnées  $P(1, t)$ .

1. On considère la droite  $\Delta_t$  passant par les points  $O$  et  $P$ . Donner une équation cartésienne de cette droite.
2. Soit  $Q$  le point d'intersection de  $\Delta_t$  avec le cercle  $C$  et  $M$  le point défini par la relation  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{QP}$ .

Montrer que les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  vérifient les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{cases}$$

On note  $\Gamma$  la courbe décrite par  $M$  lorsque  $P$  parcourt la droite  $D$ .

3. Donner une équation cartésienne de  $\Gamma$ .
4. Donner une équation polaire de la courbe ( $\Gamma$ ).
5. Etudier et représenter la courbe  $\Gamma$  (on choisira la représentation paramétrique pour cette étude. Etudier en particulier la régularité, les branches infinies, les points remarquables. On admettra que  $\Gamma$  n'a qu'un seul point double, les valeurs du paramètre étant  $t = +1$  et  $t = -1$ . Donner le tableau des variations et tracer le graphe de  $\Gamma$ ).

### 2e partie - ANALYSE

**Exercice 1 :** On considère les deux parties suivantes de l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Vous justifierez votre réponse à chacune des questions suivantes.

1. La partie  $A_1$  est-elle un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ?
2. La partie  $A_2$  est-elle un fermé de  $\mathbb{R}^2$  ?
3. La partie  $A_1 \cup A_2$  est-elle un fermé de  $\mathbb{R}^2$  ?

4. Déterminer l'intérieur des parties  $A_1, A_2$  et  $A_1 \cap A_2$ .
5. La partie  $A_1$  est-elle un compact de  $\mathbb{R}^2$  ?
6. La partie  $A_2$  est-elle un compact de  $\mathbb{R}^2$  ?
7. La partie  $A_1 \cap A_2$  est-elle un compact de  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 2 :**  $\mathcal{C}^1[0, 1]$  désigne l'ensemble des fonctions réelles continûment dérivables sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On considère l'espace vectoriel  $E = \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1] \text{ tel que } f(0) = 0\}$ .

Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ ,  $\|f\|_\infty$  désigne le réel positif  $\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ .

On définit les deux applications suivantes sur  $E$  :

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .

1. Montrer que  $N_1$  est une norme sur  $E$ . On admettra que  $N_2$  est également une norme sur  $E$ .
2. (a) Pour toute fonction  $f \in E$ , on pose :

$$\forall t \in [0, 1] \quad g(t) = f(t) + f'(t).$$

Vérifier que la fonction  $f$  peut s'exprimer en fonction de  $g$  par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t g(s) e^s ds.$$

- (b) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$|f(t)| \leq \|g\|_\infty \left[ \int_0^1 e^s ds \right].$$

- (c) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$|f'(t)| \leq e \|g\|_\infty.$$

- (d) En déduire que pour toute fonction  $f \in E$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$N_2(f) \leq C N_1(f).$$

- (e) Les deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 3 :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \ln \left| \frac{x}{y} \right| & \text{si } xy \neq 0 \\ f(x, y) &= 0 & \text{si } xy = 0. \end{aligned}$$

1. Etudier la continuité de la fonction  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Etudier l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

—