

DEVOIR SURVEILLE de MATHÉMATIQUES

2e année de 1er cycle

Date : mercredi 8 novembre 2000

Durée : 3 h (9 h - 12 h)

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Les deux parties sont complètement **indépendantes** l'une de l'autre

Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente

Chaque partie sera notée sur 10

Le texte comporte 3 pages

1e partie - **ANALYSE**

Exercice 1 : Soit $E = C[0, 1]$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On définit 2 fonctions de E dans \mathbb{R}_+ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 t |f(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 t^2 f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que si $f \in E$ et $f = 0$ sur $]0, 1]$ alors $f(0) = 0$.

2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ définit une norme sur E .

On admet que $\|\cdot\|_2$ définit aussi une norme.

3. Montrer que $\forall f \in E, \|f\|_1 \leq \|f\|_2$

4. Soit $f_n, n \geq 1$, la fonction de E définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} n(1 - nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

5. Soit $F = \{f \in E / \|f\|_1 \leq 1\}$.

(a) Montrer que F est fermé.

(b) Trouver une suite (ϕ_n) dans F telle que la suite de réels $(\phi_n(0))$ soit non bornée.

Exercice 2 : Soit $f(x, y) = \frac{xy \ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Sachant que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, déterminer le prolongement par continuité de f en $(0, 0)$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Déterminer alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
3. On cherche à déterminer les extrema (maximum et minimum) de f sur le $1/4$ de disque

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

On utilise les coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ et on définit g par $g(\rho, \theta) = f(x, y)$.

- (a) Donner le tableau de variation de la fonction ϕ définie sur $[0, 2]$ par $\phi(t) = t \ln(t)$.
- (b) En déduire le maximum et le minimum de g sur $K' = [0, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser aussi en quels points de K on obtient le maximum et le minimum de f .

Exercice 3 : Les trois affirmations ci-dessous sont fausses ! Prouvez-le !

1. Sur \mathbb{R}^2 , on peut définir une norme par $\|(x, y)\| = x^2 - y^2$.
2. Si $E = \mathcal{C}[0, 1]$ est muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, l'ensemble Ω défini ci dessous est ouvert.

$$\Omega = \{f \in E / \forall x \in [0, 1] f(x) \geq 0\}$$

3. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, alors f est continue en $(0, 0)$.

2e partie - GEOMETRIE

Partie I (Cours)

Exercice 1 : Soient \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux espaces affines de directions respectives E_1 et E_2 , soit u une application affine de \mathcal{A}_1 sur \mathcal{A}_2 de partie linéaire f . Montrer que :

1. u est injective $\Leftrightarrow f$ est injective.
2. u est surjective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Exercice 2 : Soit \tilde{f} un arc paramétré sur un intervalle I , soit $t_0 \in I$. Montrer que si $\tilde{f}'(t_0) \neq \vec{0}$, $\tilde{f}''(t_0) \neq \vec{0}$, et $\det(\tilde{f}'(t_0), \tilde{f}''(t_0)) \neq 0$ alors le point M_0 de coordonnées $\tilde{f}(t_0)$ est un point à concavité.

Partie II

Exercice 1 : Soit \mathcal{A}_3 un espace affine euclidien de dimension 3 dans lequel on s'est donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et soient deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} y - z - 2 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

1. Donner une représentation paramétrique des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .
2. Donner un point A_1 et un vecteur directeur \vec{u}_1 de \mathcal{D}_1 et un point A_2 et un vecteur directeur \vec{u}_2 de \mathcal{D}_2 .
3. Déterminer l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par le point $A(6, 10, 5)$ tel que \mathcal{D}_1 est parallèle à \mathcal{P} , \mathcal{D}_2 est parallèle à \mathcal{P} .

Exercice 2 : Soit \mathcal{A}_3 un espace affine euclidien de dimension 3 dans lequel on s'est donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(1, 1, 1)$ un point de \mathcal{A}_3 , on considère les plans d'équation

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) & : x + y - 1 = 0 & (\mathcal{P}_2) & : y + z - 1 = 0 \\ (\mathcal{P}_3) & : x + z - 1 = 0 & (\mathcal{P}_4) & : x - y + z = 0. \end{aligned}$$

Soient H_1, H_2, H_3 et H_4 les projections orthogonales de A respectivement sur $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ et \mathcal{P}_4 . Montrer que la famille (H_1, H_2, H_3, H_4) est une base affine et déterminer les coordonnées barycentriques de O dans cette base.

Exercice 3 : Soit \mathcal{A}_2 le plan affine, et soit la courbe paramétrée d'équation

$$x(t) = \frac{t^3}{1+t^3} \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Etudier cette courbe paramétrée :

1. Donner le domaine de définition.
2. Dresser le tableau de variations.
3. Etudier le point de rebroussement.
4. Etudier les branches infinies et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
5. Donner l'allure de la courbe.
