

## DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES

2e année de 1er cycle

Date : Mercredi 16 novembre 1994

Durée : 4 heures (8h - 12h)

Documents autorisés : Polycopiés et notes de cours et de T.D. de 1e et 2e année de Maths.

Les deux parties sont complètement indépendantes l'une de l'autre.

Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente.

Chaque partie sera notée sur 10.

---

GEOMETRIE

## Exercice 1

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, démontrer que les droites d'équations :

$$\begin{aligned}y - 2 &= 0 \\x - y + 4 &= 0 \\x + y - 2 &= 0\end{aligned}$$

ont trois points d'intersection A, B, C.

Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

## Exercice 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \\ y = t + \frac{1}{t-1} \end{cases}$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Démontrer qu'elle a un point double.

## Exercice 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, donner la nature et les éléments de la conique d'équation

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 6x - 42y + 9 = 0.$$

## ANALYSE

## Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  par

$$f(x, y) = x \ln x + y \ln y$$

1. Etudier les extrema locaux de  $f$ .
2. Etudier les extrema de  $f$  avec la contrainte

$$g(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur le compact de  $\mathbb{R}^2$   $P = [0, 1] \times [0, 1]$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $P$ .
2. Etudier la différentiabilité de  $f$  sur  $P$ .
3. Démontrer que  $f$  est bornée et qu'elle atteint sa borne supérieure en un point intérieur à  $P$ .
4. Calculer les dérivées partielles de  $f$  pour  $x < y$  et  $x > y$ . En déduire le point de  $P$  où  $f$  atteint sa borne supérieure.

## Exercice 3

Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne ( $\|(x, y)\| = r = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}}$ )  $D$  et  $D'$  sont les deux ensembles ouverts suivants :

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 ; u^2 + v^2 = r^2 < 1 ; (u, v) \neq (0, 0)\}$$

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2 > 1\}.$$

1. Soit  $g$  l'application définie sur  $D'$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$g(x, y) = \left( u = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4}, v = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{r^2} \right).$$

- a) Démontrer que  $g$  est une bijection de  $D'$  sur  $D$ .

$$\text{b) Démontrer que } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^4} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{r^4}.$$

- c) Démontrer que  $g$  est différentiable sur  $D'$ . Quelle est sa différentielle ?

2. Soit  $f$  une application de classe  $C^1$ , définie sur  $D$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , solution sur  $D$  de l'équation aux dérivées partielles

$$(\Delta_1 f)(u, v) = 0$$

$$\text{où } (\Delta_1 f)(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

On définit sur  $D'$  une fonction  $F$  par  $F = f \circ g$  (soit  $F(x, y) = f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ )

$$\text{a) Démontrer que } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + 2 \frac{x}{r^2} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

$$\text{b) Calculer } (\Delta_1 F)(x, y) \text{ en fonction de } (\Delta_1 f)\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

En déduire que  $F$  est solution, sur  $D'$ , de l'équation aux dérivées partielles  $(\Delta_1 F)(x, y) = 0$ .