

## DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES

2e année de 1er cycle

Date : Mardi 14 novembre 1995

Durée : 4 heures (8h - 12h)

Documents autorisés : Polycopiés et notes de cours et de T.D. 1e et 2e année de Maths

Les deux parties sont complètement indépendantes l'une de l'autre.

Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente.

Chaque partie sera notée sur 10.

Seules les calculatrices de type "Collège" sont autorisées

## GEOMETRIE

## Exercice (2,5 pts)

Démontrer que la conique d'équation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

est une ellipse dont on déterminera le centre et les demi-axes.

## Problème (7,5 pts)

On considère la courbe C de  $\mathbb{R}^2$  d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

1. Etudier le (ou les) points stationnaires de C.

2. Démontrer que  $x'y'' - x''y'$  a un signe constant.

Etudier les points d'inflexion de C.

3. Etudier les branches infinies de C.

Préciser la position de C par rapport à son asymptote.

4. Démontrer que C a un point double.

Quelles sont ses coordonnées ?

5. Donner l'équation de la tangente au point correspondant à la valeur  $t = 1$  du paramètre.

6. Donner le tableau de variation.

Tracer la courbe C (on prendra soin de placer trois points remarquables de C et les tangentes en ces points).



## ANALYSE

**Exercice 1**

- 1) Intégrer sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- l'équation différentielle

$$(*) \quad x \varphi'(x) = \varphi(x)$$

- 2) Intégrer sur
- $\mathbb{R}_+^{*2}$
- , l'équation aux dérivées partielles

$$(**) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

On pourra poser  $u = xy$  et  $v = y/x$ .

**Exercice 2**

On définit  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$  sur  $\mathbb{R}^2$

- 1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2(x^2 - 2) \geq -1$ .
- 2) En déduire que  $f$  est minorée par  $-2$ .
- 3) Déterminer les extrema de  $f$ , relatifs et absolus, sur  $K = [-2, 2]^2$ .

**Exercice 3**

Sur  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $\|U\| = \max(|x-2y|, |x+y|)$  où  $U = (x,y)$  et on admet qu'on définit ainsi une norme.

- 1) Représenter graphiquement la boule unité  $B(0,1)$  en précisant les coordonnées des points remarquables. Sur le même graphique représenter la boule unité  $B_\infty(0,1)$  sous la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- 2) Déterminer la constante  $c_1$  minimum vérifiant

$$\forall U \in \mathbb{R}^2 \quad \|U\| \leq c_1 \|U\|_\infty.$$

- 3) Pour  $U$  non nul, on pose  $V = \frac{U}{\|U\|}$ . Montrer que  $\|V\|_\infty \leq 1$ ; rien n'empêche de s'aider du graphique....

- 4) En déduire la constante  $c_2$  minimum vérifiant

$$\forall U \in \mathbb{R}^2 \quad \|U\|_\infty \leq c_2 \|U\|.$$

**Exercice 4**

Existence et calcul éventuel de  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ .

---