

**DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES****2e année de 1er cycle****Date : Lundi 10 novembre 1997****durée : 4 h (8h - 12h)**

Seuls les photocopies de cours de Mathématiques 2e année sont autorisés

**Les calculatrices sont interdites****Les deux parties sont complètement indépendantes l'une de l'autre.****Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente.****Chaque partie sera notée sur 10.****1e Partie : ANALYSE**

**Exercice 1 :**  $E = \mathbb{R}$ , la norme sur  $E$  est la valeur absolue ; on rappelle que  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  et  $\overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ .

1°/ Sachant que  $A = \{-1\} \cup ]0,1[ \cup ]1,2[ \cup \{3+r, r \in \mathbb{Q}_+\}$ , déterminer, sans explication, les ensembles :

$$\bar{A}, \overset{o}{A}, \bar{\bar{A}}, \overset{o}{\bar{A}}, \bar{\overset{o}{A}}, \overset{o}{\bar{\overset{o}{A}}}$$

2°/ L'ensemble  $B = \mathbb{N}$  est-il ouvert ? fermé ? compact ? (la première réponse commencera par "oui  $B$  est ouvert car" ou "non  $B$  n'est pas ouvert car" ; de même pour les suivantes).

**Exercice 2 :** Sur  $\mathbb{R}^2$ , on définit  $N(x,y) = \int_0^1 |x+ty| dt$ .

1°/ Montrer que  $N$  est une norme.

2°/ La fonction  $N$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  est-elle différentiable en  $(0,0)$  ?

**Exercice 3 :** Soit  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ .

1°/ Etudier la continuité de  $f$  en  $(0,0)$ .

2°/ Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$  pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

3°/ En déduire  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  et montrer que  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ .

**Exercice 4 :** Une plaque métallique carrée est placée dans un plan muni d'un repère de sorte que ses sommets occupent les points  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  et  $(1,1)$ . Les 4 bords sont maintenus à une température de  $0^\circ$ . La température initiale à  $t=0$  de la plaque en un point  $(x,y)$  est donnée par  $T(x,y) = 100 \sin \pi x \sin \pi y$ .

1°/ Montrer qu'à l'instant initial, la température admet un maximum et un minimum qu'on déterminera.

2°/ On admet que la fonction  $U(x,y,t)$  qui donne la température en  $(x,y)$  à l'instant  $t$  vérifie :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (k > 0 \text{ donné}), \text{ équation de la chaleur.}$$

On admet aussi que compte-tenu des conditions initiales, ce problème admet une solution unique.

Rechercher cette solution sous la forme  $U(x,y,t) = \sin \pi x \sin \pi y h(t)$  où  $h$  est une fonction définie sur  $[0, +\infty[$  à déterminer.

3°/ Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(x,y,t)$ .

→ 2e partie : Géométrie

2e Partie: **GEOMETRIE****Exercice 1** (4 pts)

$$\frac{1}{6}x^2 - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{6} \quad e = -\frac{1}{2} \quad f = \frac{1}{2}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O\vec{x}, O\vec{y})$ .

Soient F le point de coordonnées (0,2) et D la droite d'équation  $y = -1$ .

1. Démontrer que la parabole de foyer F et de directrice D a pour équation

$$y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}.$$

2. Démontrer que la droite contenant le point F et ayant pour coefficient de pente 1 coupe la parabole en deux points M et N de coordonnées respectives

$$x_M = 3 + 3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_N = 3 - 3\sqrt{2}.$$

3. Démontrer que les tangentes à la parabole en M et N sont orthogonales. Que peut-on dire de leur point d'intersection K ?

4. Comparer les directions de MN et FK.

$$2 \quad \frac{4}{2}$$

**Exercice 2** (6 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O\vec{x}, O\vec{y})$ .

On considère la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 1}{2t} \\ y(t) = \frac{2t - 1}{t^2} \end{cases}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$f = 5$$

1. Calculer les dérivées  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  et étudier leur signe. Etudier les points stationnaires.

2. Etudier les branches infinies.

Démontrer que la courbe est asymptote à la parabole d'équation

$y = -4x^2 + 4x + 2$  et donner la position de la courbe par rapport à la parabole.

3. Démontrer que la courbe n'a pas de point double.
4. Dresser le tableau de variations et tracer la courbe.
5. Etudier les points d'intersection de la courbe et de la droite contenant le point de coordonnées (1,1) et de pente m (m est un paramètre réel).