

**DEVOIR SURVEILLE de MATHEMATIQUES**

2e année de 1er cycle

Date : Mardi 9 novembre 1999

Durée : 4 h (8 h - 12 h)

**AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ**

**LES CALCULATRICES SONT INTERDITES**

Les deux parties sont complètement indépendantes l'une de l'autre

Elles devront être rédigées sur des copies de couleur différente

Chaque partie sera notée sur 10

Le texte comporte 3 pages

1e partie - ANALYSE

**Exercice 1 :** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

Pour tout  $U_1 = (x_1, y_1)$  et tout  $U_2 = (x_2, y_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit  $U_1 \cdot U_2 = 2x_1x_2 + y_1y_2$ .

1. (a) Montrer que  $\forall U_1 \in \mathbb{R}^2, \forall U_2 \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$(U_1 + tU_2) \cdot (U_1 + tU_2) = (U_1 \cdot U_1) + 2t(U_1 \cdot U_2) + t^2(U_2 \cdot U_2)$$

- (b) En déduire que  $\forall U_1 \in \mathbb{R}^2, \forall U_2 \in \mathbb{R}^2, |U_1 \cdot U_2| \leq (U_1 \cdot U_1)^{1/2} (U_2 \cdot U_2)^{1/2}$ .

2. Pour  $U$  dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\|U\| = (U \cdot U)^{1/2}$ . Montrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

3. Soit  $A = \{U = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / e^{2x^2+y^2} < 3\}$ .

(a)  $A$  est-il fermé ?

(b)  $A$  est-il borné ?

(c) Déterminer  $\bar{A}$  et  $\overset{\circ}{A}$ .

(d)  $A$  est-il compact ?

(e)  $\bar{A}$  est-il compact ?

**Exercice 2 :** Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et bornées. On admet que  $\mathcal{B}$  est un espace vectoriel. Pour  $f \in \mathcal{B}$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  définit une norme sur  $\mathcal{B}$  (c'est cette norme qui sera utilisée dans la suite).

2. L'application  $\phi : \begin{cases} \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \|f\|_\infty \end{cases}$  est-elle linéaire ?

(On démontrera la linéarité ou la non-linéarité).

3. Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Montrer que  $(f_n)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{B}$ .

(b) Montrer que  $(f_n)$  converge vers une fonction  $f$  de  $\mathcal{B}$  que l'on précisera.

4. Soit  $g_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

(a) Montrer que  $g_n$  est dans la boule unité fermée  $\overline{U}$  de  $\mathcal{B}$ .

(b) Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ , calculer  $\|g_m - g_n\|_\infty$ .

(c) En déduire que  $\overline{U}$  n'est pas compacte.

**Exercice 3 :** Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(On démontrera la continuité en tout point de  $\mathbb{R}^2$  ou la non continuité).

**Exercice 4 :** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  (On démontrera la continuité en tout point de  $\mathbb{R}^2$  ou la non continuité).

2. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en tous les points de  $\mathbb{R}^2$ .

3. Montrer que  $f$  est continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

-----

## 2e partie : GEOMETRIE

### Exercice 1 (cours)

Soient  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  deux espaces affines de directions respectives  $E_1$  et  $E_2$ .

Soit  $u$  une application affine de  $\mathcal{A}_1$  dans  $\mathcal{A}_2$  de partie linéaire  $f$ .

Montrer que :

1.  $u$  est injective  $\Leftrightarrow f$  est injective
2.  $u$  est surjective  $\Leftrightarrow f$  est surjective.

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{A}_3$  un espace affine euclidien de dimension 3;  $R_3 = (0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct.

1. Soit  $M_0$  un point de coordonnées  $(1, 1, 1)$ .

Soit  $\mathcal{D}_1$  une droite affine passant par le point  $A$  de coordonnées  $(2, -1, 1)$  et de direction  $\text{vect}(\vec{u}_1)$  avec  $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ .

Calculer  $d(M_0, \mathcal{D}_1)$ .

2. Soit  $\mathcal{D}_2$  une autre droite d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

- (a) Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}_2$ .
- (b) Calculer  $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  (détailler la méthode utilisée).
- (c) Trouver une équation cartésienne du plan contenant la droite  $\mathcal{D}_2$  et normal au vecteur  $(0, -1, -2)$ .

### Exercice 3

Soit la courbe paramétrée définie dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}, \vec{j})$  par

$$x(t) = t + \frac{1}{t}, \quad y(t) = 3t + \frac{1}{t^3}.$$

1. Donner le domaine de définition et le domaine d'étude.
2. Dresser le tableau de variation.
3. Etudier les branches infinies.
4. Déterminer les points de rebroussements.
5. Trouver les points d'intersection de la courbe avec les asymptotes.
6. Dessiner la courbe.

-----