

DEVOIR SURVEILLE de MECANIQUE

2e année de 1er cycle

Date : vendredi 10 novembre 2000

Durée : 2 h (10h - 12h)

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ  
TOUTE CALCULATRICE EST INTERDITE

Le texte comporte 4 pages

Soit  $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$ ,  $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  un repère orthonormé direct.

On considère un disque  $(D)$  de centre  $O$ , rayon  $a$ . On lie à  $(D)$  un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que l'axe  $\Delta = (O, \vec{i})$  soit l'axe de révolution du disque  $(D)$ .  $M$  est le point du disque défini par  $\overrightarrow{OM} = a \vec{k}$ .

N.B. Les 2 parties sont indépendantes

## 1e Partie

L'axe  $\Delta$  du disque est fixe dans  $\mathcal{R}_0$  et confondu avec  $\Delta_0 = (O, \vec{i}_0)$ . Le disque  $(D)$  est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe  $\Delta$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

A l'instant  $t = 0$ , le point  $M$  se trouve en  $M_0$  défini par  $\overrightarrow{OM}_0 = a \vec{k}_0$ .

1. Donner les valeurs des 3 angles d'Euler associées à ce mouvement, en fonction du temps  $t$ .
2. Calculer les vecteurs :

$$\frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{i}, \frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{j}, \frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{k}, \text{ en projection sur la base } \mathcal{B}.$$

En déduire  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}$ , en projection sur  $\mathcal{B}$ .

Indication :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \left( \vec{i} \wedge \frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{i} + \vec{j} \wedge \frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{j} + \vec{k} \wedge \frac{d^{\mathcal{R}_0}}{dt} \vec{k} \right)$$

3. Calculer la vitesse  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)$ , en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .
4. Calculer l'accélération  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(M)$ , en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .
5. On considère le point  $P$ , mobile par rapport à  $(D)$ , défini par  $\vec{OP} = y\vec{j}$ .  
Calculer la vitesse  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(P)$  et l'accélération  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(P)$ , en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .

## 2e Partie

L'axe  $\Delta = (O, \vec{i})$  du disque  $(D)$  est situé dans le plan  $\pi_0 = (O; \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ .  $\Delta$  est animé d'un mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{k}_0)$ , avec une vitesse angulaire  $\alpha$  constante. Comme dans la première partie, le disque  $(D)$  tourne autour de  $\Delta$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

1. Décomposer le passage de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}$  en introduisant des repères intermédiaires (notations du cours).  
Donner les valeurs des 3 angles d'Euler en fonction du temps  $t$  (à l'instant  $t = 0$ ,  $\Delta$  est confondu avec  $\Delta_0$  et  $M$  se trouve en  $M_0$ ).
2. Quelle est la trajectoire de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? à  $\mathcal{R}_1$ ? à  $\mathcal{R}_0$ ?
3. Calculer  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}$  en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .
4. Calculer la vitesse  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)$  en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .
5. Calculer l'accélération  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(M)$  en projection sur  $\mathcal{B}$ .
6.
  - (a) Calculer  $\vec{OM}$  en projection sur la base  $\mathcal{B}_1$ .
  - (b) En déduire  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)$  en projection sur  $\mathcal{B}_1$ , en utilisant le théorème de dérivation en repère mobile.
  - (c) Vérifier que le résultat obtenu est en accord avec celui de la question 4.
7.
  - (a) Calculer la vitesse  $\vec{V}^{\mathcal{R}_1}(M)$ , en projection sur la base  $\mathcal{B}_1$ .
  - (b) Calculer  $\vec{V}^{\mathcal{R}_1}(M)$ , en projection sur la base  $\mathcal{B}$ , en utilisant le théorème de dérivation en repère mobile.
8. On considère le point  $P$ , mobile par rapport à  $(D)$ , défini par  $\vec{OP} = y\vec{j}$ .  
Calculer la vitesse  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(P)$  en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .

#### 4. ANGLES D'EULER

On considère deux repères :  $\mathcal{R}_0 = (0, \mathcal{B}_0)$  et  $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ , ayant même origine 0.

**Proposition :**

On peut passer du repère  $\mathcal{R}_0$  au repère  $\mathcal{R}$  en faisant 3 rotations successives :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 = (0, \mathcal{B}_0) &\longrightarrow \mathcal{R}_1 = (0, \mathcal{B}_1) \text{ par une rotation d'angle } \psi \text{ autour de } (0, \vec{k}_0) \\ \mathcal{B}_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) &\quad \mathcal{B}_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 = (0, \mathcal{B}_1) &\longrightarrow \mathcal{R}_2 = (0, \mathcal{B}_2) \text{ par une rotation d'angle } \theta \text{ autour de } (0, \vec{j}_1) \\ \mathcal{B}_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0) &\quad \mathcal{B}_2 = (\vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = (0, \mathcal{B}_2) &\longrightarrow \mathcal{R} = (0, \mathcal{B}) \text{ par une rotation d'angle } \varphi \text{ autour de } (0, \vec{k}). \\ \mathcal{B}_2 = (\vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}) &\quad \mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{aligned}$$

**Définition :**

Les angles  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  sont les **angles d'Euler** de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

$\psi$  est l'angle de précession,  $\theta$  l'angle de nutation et  $\varphi$  l'angle de rotation propre.

**Proposition :** Le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est le composé de 3 mouvements de rotation et :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2}^{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1} = \dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{i}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}.$$

