

**DEVOIR SURVEILLE de MECANIQUE**

2e année de 1er cycle

Date : Mercredi 10 novembre 1999

Durée : 2 heures (14 h - 16 h)

Aucun document n'est autorisé  
TOUTE CALCULATRICE EST INTERDITE

Le texte comporte 3 pages dont un formulaire en page 3

---

**Question de cours**

Soit  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$  et  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  deux repères orthonormés directs. On note  $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$P$  désigne un point matériel de masse  $m$ , soumis à des efforts de résultante  $\vec{F}$ .

On décompose le mouvement de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en mouvement relatif par rapport à  $\mathcal{R}$  et mouvement d'entraînement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .  $\vec{v}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}(P) + \vec{v}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}(P)$

Le repère  $\mathcal{R}_0$  est supposé Galiléen. La relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}_0$  s'écrit donc :

$$m \vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(P) = \vec{F}.$$

1. On suppose dans cette question que le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est un mouvement de translation caractérisé par  $\vec{O_0O} = \vec{A} + \vec{B}t + \vec{C}t^2$  où  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  sont des vecteurs constants dans  $\mathcal{B}_0$ .
  - (a) Calculer l'accélération de Coriolis et l'accélération d'entraînement de  $P$  (cf. formulaire 2.) :  $\vec{\Gamma}_c(P)$ ,  $\vec{\Gamma}_e(P)$ .
  - (b) La relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}$  s'écrit :  $m \vec{\Gamma}^{\mathcal{R}}(P) = \vec{G}$ . Calculer  $\vec{G}$ .
  - (c) A quelle condition a-t-on  $\vec{G} = \vec{F}$ ? En déduire une classe de repères galiléens.
2. On suppose dans cette question que le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est une rotation uniforme d'axe  $(O_0, \vec{k}_0)$ , de vitesse angulaire  $\omega$  constante.
  - (a) On note  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $P$  dans  $\mathcal{R}$ . Calculer l'accélération relative, l'accélération de Coriolis et l'accélération d'entraînement de  $P$  (cf. formulaire 2.) en projection sur la base  $\mathcal{B}$ .

(b) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}$ .

En déduire 3 équations quand la force s'exerçant sur  $P$  est  $\vec{F} = -mg \vec{k}_0$ .

### PROBLEME

Soit  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$ ,  $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  un repère orthonormé direct. On considère la courbe  $(C)$  du plan  $(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$  d'équation polaire (pôle  $O_0$ )  $r = a \cos \theta$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $a > 0$ , donné. *donné*

Un point mobile  $M$  décrit  $(C)$  dans le sens des  $\theta$  croissants. Sa position sur  $(C)$  est repérée par le paramètre  $\theta$  qui est une fonction du temps :  $\theta = \theta(t)$ . *à c*

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le point  $M$  se trouve au point  $A$  de  $(C)$  de paramètre  $\theta = 0$  et que sa vitesse numérique  $\|\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)\|$  à ce même instant  $t = 0$  est une constante strictement positive  $b$  donnée. *b > 0*

On note  $\mathcal{R} = (M, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$  le repère mobile lié aux coordonnées polaires (cf figure).

#### Préliminaires

1. Montrer que la courbe  $(C)$  est le cercle de centre  $O$  de la figure.
2. Montrer qu'à l'instant  $t = 0$ , on a  $\dot{\theta} = b/a$  (consulter éventuellement le formulaire 1.).

**Partie I.** On suppose, dans cette partie I, que le point mobile  $M$  décrit  $(C)$  avec la vitesse numérique constante  $b$  :  $\|\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)\| = b$ , à tout instant.

I.1° Exprimer les composantes de  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)$  dans la base mobile  $\mathcal{B}$  à l'aide de  $\theta$  seul (et non de  $\dot{\theta}$ ).

Déterminer la loi horaire du mouvement, c'est-à-dire  $\theta$  en fonction du temps  $t$  et en déduire le temps que le mobile met pour parcourir le cercle  $(C)$  une fois et une seule.

I.2° Exprimer les composantes de l'accélération  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(M)$  du mobile  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  dans la base mobile en fonction de  $\theta$  (mais ni de  $\dot{\theta}$  ni de  $\ddot{\theta}$ ). Commentez le résultat.

I.3° Dessiner  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(M)$  et  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(M)$  au point courant de la figure : on prendra  $b = a$ .

**N.B.** Dans cette partie I, on s'attachera à produire des résultats et des dessins plausibles. On consultera éventuellement le formulaire 1.

**Partie II.** On suppose, dans cette partie II, que le point mobile  $M$  décrit la courbe  $(C)$  dans le sens des  $\theta$  croissants d'un mouvement par ailleurs quelconque.

Soit  $\mathcal{B}'$  la base orthonormée directe  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de la tangente orientée au cercle  $(C)$  (et  $\vec{v}$  le vecteur unitaire directement perpendiculaire) (cf. figure). On note  $\mathcal{R}'$  le repère orthonormé direct  $(M, \mathcal{B}')$ . Le repère  $\mathcal{R}'$  est donc en mouvement à la fois par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  et au repère  $\mathcal{R}$ .

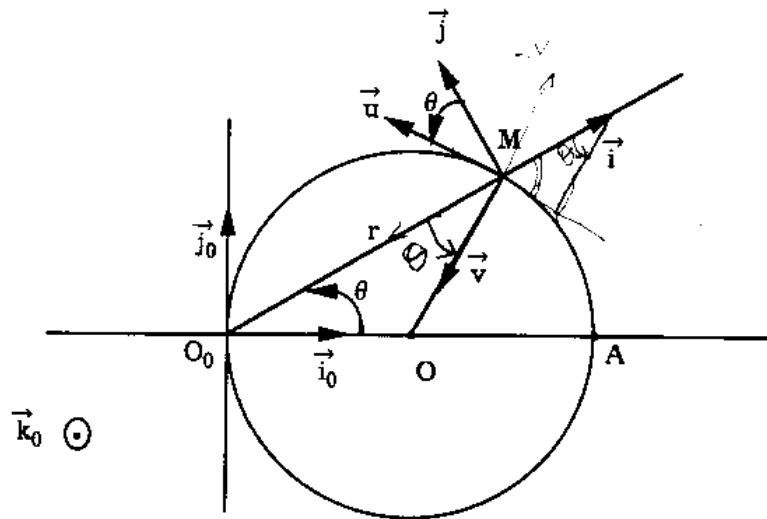
**Préliminaire :** Déterminer  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}}$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{R}'}$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}'}$  (cf. figure).

- II.1°) Soit  $P$  un point fixe par rapport à  $\mathcal{R}'$  de coordonnées  $(x, y, z)$  (indépendantes du temps) dans ce repère. Déterminer les composantes dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $\vec{V}^{\mathcal{R}}(P)$  et de  $\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(P)$ .

En utilisant éventuellement le deuxième théorème de dérivation en base mobile (et donc sans utiliser directement la formule rappelée en 2.), déterminer les composantes dans la base  $\mathcal{B}'$  des vecteurs  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}}(P)$  et  $\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(P)$ .

- II.2°) On suppose dans cette question le point  $P$  mobile par rapport à ce repère  $\mathcal{R}'$  : les coordonnées  $(x, y, z)$  du point  $P$  dans ce repère  $\mathcal{R}'$  dépendent donc, dans cette question, a priori, du temps et on considère le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Déterminer les composantes dans la base  $\mathcal{B}'$  de la vitesse d'entraînement, de la vitesse relative, de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération de Coriolis du point  $P$ . On utilisera les résultats de la question précédente, en particulier pour le calcul des composantes de l'accélération d'entraînement (on n'utilisera donc toujours pas la formule rappelée en 2.).



### Formulaire

1. Composantes de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires :  $\vec{O_0P} = r\vec{i}$ ,  $(\vec{i}, \vec{j})$  base mobile liée aux coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\vec{V}^{\mathcal{R}_0}(P) &= \dot{r}\vec{i} + r\dot{\theta}\vec{j}, \\ \vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(P) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{i} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{j}.\end{aligned}$$

2. Accélération d'entraînement d'un point  $P$  mobile par rapport à un repère  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$  lui-même mobile par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  :

$$\vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(\tilde{P}) = \vec{\Gamma}^{\mathcal{R}_0}(O) + \frac{d\mathcal{R}_0}{dt} \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} \right) \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} \wedge \vec{OP} \right),$$

où  $\tilde{P}$  désigne la particule liée à  $\mathcal{R}$  qui coïncide avec la particule  $P$  à l'instant  $t$ , formule valable uniquement à l'instant  $t$  de coïncidence de  $\tilde{P}$  et de  $P$ .

N.B. La formule 2. ne doit pas être utilisée dans le problème (sauf pour vérifications éventuelles au brouillon).